1. Ecuaciones diferenciales de primer orden. Aplicaciones

1.20 Encuentre las trayectorias ortogonales a las siguientes familias de curvas:

(a) $\frac{x^2}{2} + y^2 = c$ con $c > 0$.

(b) $y = x - 1 + ce^{-x}$ con $c \in \mathbb{R}$.

1.21 La aceleración $v'(t)$ de un cierto automóvil es, en cada instante, proporcional a la diferencia entre 250 Km/h y la velocidad que lleva $v(t)$. Sabiendo que el automóvil pasa del reposo a la velocidad de 100 Km/h en 10 segundos, ¿cuánto tiempo necesitará para pasar del reposo a 200 Km/h?

1.22 Una población $p(t)$ en el tiempo t se rige por el modelo logístico de crecimiento si satisface la ecuación:

$$p'(t) = ap - bp^2, \quad p(0) = p_0,$$

con $a = k - k_1 + k_2/2$ y $b = k_2/2$ siendo $k > 0$ la constante de proporcionalidad de la tasa de natalidad, $k_1 > 0$ la constante de proporcionalidad de la tasa de mortalidad (causas naturales) y $k_2 > 0$ la constante de proporcionalidad de la tasa de mortalidad debida a la competencia entre especies, siendo el número de interacciones bipartidas $p(p-1)/2$. Suponga que en 1995 se arrojó en un lago 1000 ejemplares de una especie de pez. Se estimó que la población de peces en 2002 y en 2009 era de 3000 y 5000 ejemplares, respectivamente. ¿Cuál es la predicción de la población de peces en 2016?

1.23 Se ha calentado un litro de agua a una temperatura de 78º C. Seis minutos después su temperatura es de 73º C. La temperatura del medio ambiente es constante y se mantiene a 19º C. Determine la expresión matemática que describe este fenómeno físico. En este modelo de enfriamiento, $-\frac{dT}{dt}$ es la razón de disminución de la temperatura respecto al tiempo y se aplicará la Ley de Newton: la razón de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura inicial del cuerpo y la temperatura constante del medio que lo rodea.

1.24 La segunda ley de Kirchhoff establece que en un circuito en serie la suma de las caídas de voltaje a través de los elementos del circuito (inductor, resistencia) es igual al voltaje $V(t)$ suministrado al circuito. Si $I(t)$ es la intensidad de corriente, la caída de voltaje a través de la resistencia verifica $V_R(t) = RI(t)$ y la caída de voltaje a través del inductor $V_L(t) = L\frac{dI}{dt}$, donde R y L son las constantes de resistencia e inductancia respectivamente. La respuesta $I(t)$ de un sistema que contiene una resistencia y un inductor verifica la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V(t)$$

Una bateria de 12 voltios se conecta a un circuito simple cuya inductancia es $L = \frac{1}{2}$ Henrio y su resistencia es de R=10 Ohmios. Determine la corriente $I(t)$ si la corriente inicial es cero.